

## MATEMATIKA 2

### Lekcija 4- Kvadratura ravne figure. Kubatura obrtnog tela

**Površina ravne figure.** Neka je  $D$  jedna figura u nekoj ravni. Definisaćemo površinu ravne figure  $D$ .

Najpre definišemo upisanu poligonalnu oblast u figuru  $D$  kao poligonalnu oblast čije sve tačke se nalaze u  $D$ . Poligonalna oblast koja sadrži sve tačke figure  $D$  naziva se opisana poligonalna oblast oko figure  $D$ . (Poligonalnom oblašću ovde se naziva svaka ograničena zatvorena oblast u ravni čiji rub je neki poligon, kao i svaka unija takvih oblasti.)

Označimo sa  $\{P_u\}$  skup površinâ svih upisanih, a sa  $\{P_o\}$  skup površinâ svih opisanih poligonalnih oblasti figure  $D$ . Očigledno je da je skup  $\{P_u\}$  ograničen odozgo, a skup  $\{P_o\}$  ograničen odozdo, te postoje konačni  $\sup\{P_u\} = \underline{P}$  i  $\inf\{P_o\} = \overline{P}$ . Lako se pokazuje da je  $\underline{P} \leq \overline{P}$ .

**Definicija:** Kažemo da je figura  $D$  merljiva ako je  $\underline{P} = \overline{P}$ . Pritom se zajednička vrednost  $\underline{P}$  i  $\overline{P}$  zove površina figure  $D$  i označava se sa  $P(D)$ .

**Teorema o egzistenciji:** Ako za ravnu figuru  $D$  postoje niz  $(A_n)$  upisanih i niz  $(B_n)$  opisanih poligonalnih oblasti, takvi da je

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) \quad (= P),$$

tada je  $D$  merljiva figura i njena površina je jednaka  $P$ . Važi i opštija teorema, koja se od ove razlikuje samo u tome što su, za svaki  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n$  i  $B_n$  neke merljive ravne figure takve da je  $A_n \subset D \subset B_n$ . (Dokaz — na vežbama AG).

**Svojstva:** 1<sup>0</sup> (Nenegativnost) Ako je ravna figura  $D$  merljiva, onda je  $P(D) \geq 0$ . 2<sup>0</sup> (Aditivnost) Ako je ravna figura  $D$  unija figurâ  $D_1$  i  $D_2$  koje nemaju zajedničkih unutrašnjih tačaka i ako su  $D_1$  i  $D_2$  merljive figure, tada je i  $D$  merljiva figura i važi  $P(D) = P(D_1) + P(D_2)$ . Takodje, ako su  $D$  i  $D_1$  merljive, onda je i  $D_2$  merljiva. 3<sup>0</sup> (Invarijantnost u odnosu na kretanje) Ako su ravne figure  $D_1$  i  $D_2$  podudarne i  $D_1$  je merljiva, onda je i  $D_2$  merljiva i važi  $P(D_2) = P(D_1)$ . (Bez dokaza.)

**Površina krivolinijskog trapeza.** Neka je  $f(x)$  neprekidna nenegativna funkcija definisana na zatvorenom intervalu  $[a, b]$ . Površina  $P$  krivolinijskog trapeza  $T$  u ravni  $Oxy$  ograničenog apscisnom osom, pravim  $x = a$  i  $x = b$  i grafikom funkcije  $f(x)$  jednaka je

$$P = \int_a^b f(x) dx.$$

(Dokaz — na vežbama AG.)

Površina krivolinijskog trapeza sa dva krivolinijska kraka može se izračunati svodjenjem na slučaj krivolinijskog trapeza sa jednim krivolinijskim krakom, koji smo upravo razmotrili. Tako se dobija sledeća teorema: ako su  $f_1(x)$  i  $f_2(x)$  neke neprekidne funkcije na segmentu  $[a, b]$ , i  $f_1(x) \leq f_2(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , tada je površina  $P$  krivolinijskog trapeza između krivih  $y = f_1(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , i  $y = f_2(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , nad segmentom  $[a, b]$ , jednaka

$$P = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

(Pokazati samostalno.)

**Primer 1.** (Površina kružnog isečka.) Pokazati da je površina  $P$  kružnog isečka poluprečnika  $r$  i centralnog ugla  $\alpha$  (u radijanima) jednaka  $P = \frac{1}{2}r^2\alpha$ .

**Rešenje.** Neka je  $D$  kružni isečak poluprečnika  $r$  i centralnog ugla  $\alpha$ . Razmotrimo najpre slučaj kad je  $\alpha$  oštar ugao:  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . U ravni u kojoj leži  $D$  uvedimo koordinatni sistem  $Oxy$  tako da centar kružnog isečka  $D$  bude koordinatni početak  $O$ , da jedan njegov granični poluprečnik bude na pozitivnom delu  $x$ -ose, a ostale tačke isečka  $D$  u prvom kvadrantu. Prava  $x = r \cos \alpha$  deli  $D$  na jedan pravougli trougao  $D_1$  i jedan krivolinijski trapez  $D_2$ . Lako je videti da je  $P(D_1) = \frac{1}{2}r^2 \sin \alpha \cos \alpha$ . Površinu figure  $D_2$  izračunaćemo pomoću integrala, kao površinu krivolinijskog trapeza ispod krive  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$  nad segmentom  $[r \cos \alpha, r]$ :

$$\begin{aligned} P(D_2) &= \int_{r \cos \alpha}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = r^2 \int_0^\alpha \sin^2 t dt = \\ &= \frac{1}{2}r^2 \left( t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^\alpha = \frac{1}{2}r^2 \alpha - \frac{1}{4}r^2 \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

(Korišćena je smena  $\arccos \frac{x}{r} = t$ .) Kako je  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ , to je  $P = P(D_1) + P(D_2) = \frac{1}{2}r^2\alpha$ .

Ako  $\alpha$  nije oštar ugao, onda se kružni isečak  $D$ , povlačenjem nekih pravih kroz njegov centar, može podeliti na nekoliko kružnih isečaka sa oštrim centralnim uglovima, i tako (uz korišćenje svojstva aditivnosti površine ravne figure) svesti opšti slučaj na slučaj oštrog centralnog ugla, koji smo razmotrili.

**Slučaj krive u polarnim koordinatama.** Neka je kriva  $C$  u  $r\varphi$ -ravni zadata jednačinom u polarnim koordinatama  $r = f(\varphi)$ ,  $\varphi \in [\alpha, \beta]$

( $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$ ), gde je  $f(\varphi)$  jedna neprekidna funkcija. (Podsetimo se da je položaj tačke  $M$  u  $r\varphi$ -ravni određen uređenim parom  $(r, \varphi)$  gde je  $r$  rastojanje tačke  $M$  od koordinatnog početka  $O$ , a  $\varphi$  ugao između vektora  $\overrightarrow{OA}$  i  $x$ -ose. Pritom se  $r$  i  $\varphi$  nazivaju polarnim koordinatama tačke  $M$ , i to  $r$  polarnim radijusom a  $\varphi$  polarnim uglom,  $x$ -osa se naziva polarnom osom i tačka  $O$  polom.) Tada je površina  $P$  figure  $I$  u  $r\varphi$ -ravni ograničene polupravim  $\varphi = \alpha$  i  $\varphi = \beta$  i krivom  $C$  jednaka

$$P = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\varphi)]^2 d\varphi.$$

(Dokaz — na vežbama AG.) (Ovakva figura  $I$  naziva se krivolinijskim isečkom.)

**Primer 2.** Izračunajmo površinu figure  $D$  u  $r\varphi$ -ravni ograničene krivom zadatom jednačinom u polarnim koordinatama:  $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$  ( $a > 0$ ). (Ovakva kriva naziva se Bernulijeva lemniskata.)

**Rešenje.** Figura  $D$  je simetrična u odnosu na polarnu osu, tj. u odnosu na pravu  $r \sin \varphi = 0$ , i u odnosu na pravu  $r \cos \varphi = 0$ . (Pokazati.) Zato je  $P(D) = 4P(I)$ , gde je  $I$  krivolinijski isečak ograničen krivom  $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ ,  $\varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]$ , i polupravom  $\varphi = 0$ . Kako je

$$P(I) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = \frac{1}{2} a^2 \left. \frac{\sin 2\varphi}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} a^2,$$

to je  $P(D) = a^2$ .

**Slučaj parametarski zadate krive.** Neka je kriva  $C$  u ravni  $Oxy$  zadata parametarski:  $x = g(t)$ ,  $y = h(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$  i  $g(\alpha) = a$ ,  $g(\beta) = b$ . (Pritom su  $g$  i  $h$  neprekidne funkcije i postoji  $g^{-1}$ .) Tada se površina  $P$  krivolinijskog trapeza ispod krive  $C$  nad segmentom  $[a, b]$  izračunava po formuli

$$P = \int_a^b y dx = \int_{\alpha}^{\beta} h(t) g'(t) dt.$$

**Zapremina prostorne figure.** Zapremina prostorne figure definiše se na isti način kao površina ravne figure. Da bi se dobila definicija zapremine prostorne figure treba u definiciji površine ravne figure naziv "poligonalna oblast" zameniti nazivom "polijedarska oblast" i, razume se, nazive "ravna figura" i "površina ravne figure" zameniti nazivima "prostorna figura" i "zapremina prostorne figure". Uobičajena oznaka zapremine je  $V$ . Zapremina

prostorne figure ima ista osnovna svojstva  $1^0 - 3^0$  koja su ranije navedena u vezi sa površinom ravne figure. Isto tako, važi i teorema o egzistenciji zapremine prostorne figure, potpuno analogna ranije navedenoj teoremi o egzistenciji površine ravne figure. Najčešće se govori o zapremini tela, pri čemu se telom naziva svaka (ograničena) prostorna (tj. trodimenzionalna) zatvorena oblast.

**Izračunavanje zapremine tela pomoću površina ravnih preseka tela.** Neka je  $T$  jedno telo u prostoru  $Oxy$  čija ortogonalna projekcija na  $x$ -osu je segment  $[a, b]$  na  $x$ -osi. Za svaki  $x \in [a, b]$ , označimo sa  $D_x$  presek tela  $T$  i ravni koja sadrži tačku  $(x, 0, 0)$  i normalna je na  $x$ -osu. Pretpostavimo da je svaka od ovih ravnih figura  $D_x$  merljiva i da je funkcija  $y = F(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , neprekidna, pri čemu je  $F(x) = P(D_x)$ . Tada je telo  $T$  merljivo i njegova zapremina  $V$  je jednaka

$$V = \int_a^b F(x) dx.$$

(Dokaz — na vežbama AG.)

**Zapremina obrtnog tela.** Posmatrajmo sada obrtno telo  $T$  koje nastaje obrtanjem oko  $x$ -ose krivolinijskog trapeza ispod krive  $y = f(x)$  nad segmentom  $[a, b]$ , pod pretpostavkom da je funkcija  $f(x)$  nenegativna i neprekidna na  $[a, b]$ . Za svaki  $x \in [a, b]$ , presek tog tela i ravni kroz tačku  $(x, 0, 0)$  normalne na  $x$ -osu je kružna oblast čija je površina  $F(x) = \pi y^2 = \pi [f(x)]^2$ . Dakle, zapremina  $V$  tela  $T$  je jednaka

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx, \quad \text{ili} \quad V = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

**Primer 3.** Odredimo zapreminu  $V$  torusa koji se dobija obrtanjem kružne oblasti  $x^2 + (y - a)^2 \leq r^2$  oko  $x$ -ose, ako je  $0 < r < a$ .

**Rešenje.** Označimo sa  $f_1(x)$  i  $f_2(x)$ , redom, funkcije date sa

$$f_1(x) = a + \sqrt{r^2 - x^2}, \quad |x| \leq r \quad \text{i} \quad f_2(x) = a - \sqrt{r^2 - x^2}, \quad |x| \leq r.$$

Tada je tražena zapremina jednaka  $V = V_1 - V_2$ , gde je  $V_1 = \pi \int_{-r}^r [f_1(x)]^2 dx$

i  $V_2 = \pi \int_{-r}^r [f_2(x)]^2 dx$ . Prema tome,

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{-r}^r \left[ \left( a + \sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 - \left( a - \sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 \right] dx = \\
 &= \pi \int_{-r}^r \left( a^2 + 2a\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2 - a^2 + 2a\sqrt{r^2 - x^2} - r^2 + x^2 \right) dx \\
 &= 4a\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 8a\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.
 \end{aligned}$$

Poslednji integral se izračunava smenom  $x = r \sin t$ ,  $dx = r \cos t dt$ :

$$V = 8a\pi r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 8a\pi r^2 \left( \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 8a\pi r^2 \cdot \frac{\pi}{4} = 2a\pi^2 r^2.$$